

## Domáca úloha č.8

### Dvojný integrál na intervale

Nájdite dvojný integrály funkcie  $f(x, y)$  na intervale  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ , t.j. vypočítajte  $\iint_I f(x, y) dx dy$ .<sup>1</sup>

1.  $f(x, y) = xy + 7x + y, \quad I = \langle 0, 3 \rangle \times \langle 0, 3 \rangle$
2.  $f(x, y) = x^3y - xy^3, \quad I = \langle 1, 3 \rangle \times \langle -3, -1 \rangle$
3.  $f(x, y) = \sin x \cos y, \quad I = \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \times \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
4.  $f(x, y) = xe^y, \quad I = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$
5.  $f(x, y) = \frac{\sin y}{x}, \quad I = \langle 1, e \rangle \times \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

### Dvojný integrál na oblasti

Nájdite dvojný integrály funkcie  $f(x, y)$  na oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , t.j. vypočítajte  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ .<sup>2</sup>

6.  $f(x, y) = xy, \quad \Omega = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$
7.  $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}}, \quad \Omega = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}$
8.  $f(x, y) = y, \quad \Omega = \{(x, y); 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$
9.  $f(x, y) = x^2y, \quad \Omega = \{(x, y); -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$
10.  $f(x, y) = (3x + 2y), \quad \Omega = \{(x, y); -\sqrt{2y} \leq x \leq \sqrt{2y}, 0 \leq y \leq 2\}$
11.  $f(x, y) = e^{-x^2}, \quad \Omega = \{(x, y); y \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ <sup>3</sup>
12.  $f(x, y) = \sin x^2, \quad \Omega = \{(x, y); y \leq x \leq \sqrt{\pi}, 0 \leq y \leq \sqrt{\pi}\}$

<sup>1</sup>Pri výpočte dvojného integrálu **na intervale** nezáleží na poradí integrácie a platí  $\iint_I f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ .

<sup>2</sup>Pri výpočte dvojného integrálu **na oblasti** záleží na poradí integrácie. Najprv integrujeme cez premennú, v ktorej sú variabilné hranice a výpočet dokončíme integráciou cez premennú s fixnými hranicami. Takže ak napríklad  $\Omega = \{(x, y); a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ , potom  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$ .

<sup>3</sup>V tomto aj nasledujúcom príklade si musíte predefinovať oblasť  $\Omega$  tak, aby fixné hranice neboli v premennej  $y$ , ale v premennej  $x$ .